

授课教师	林麦麦	授课名称	数学的智慧与乐趣	授课班级		授课地点				
授课时数	2学时	课程类型	大学科综合课	授课时间						
章节名称	第三章 啊哈!灵机一动									
参考资料	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 《乐在其中的数学》  《啊哈!原来如此(中译本)》  《生活中的魔法数学》  《思考的乐趣: Matrix67 数学笔记》  《数学与对称》 </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 谈祥柏 著  (美)伽德纳 著;李建臣,刘正新 译  (美)亚瑟·本杰明,迈克尔·谢尔默 著  李旭大 译  顾森 著  丘成桐,刘克峰,杨乐 著 </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 科学出版社  科学出版社  中国传媒大学出版社  人民邮电出版社  高等教育出版社 </td> </tr> </table>							《乐在其中的数学》 《啊哈!原来如此(中译本)》 《生活中的魔法数学》 《思考的乐趣: Matrix67 数学笔记》 《数学与对称》	谈祥柏 著 (美)伽德纳 著;李建臣,刘正新 译 (美)亚瑟·本杰明,迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译 顾森 著 丘成桐,刘克峰,杨乐 著	科学出版社 科学出版社 中国传媒大学出版社 人民邮电出版社 高等教育出版社
《乐在其中的数学》 《啊哈!原来如此(中译本)》 《生活中的魔法数学》 《思考的乐趣: Matrix67 数学笔记》 《数学与对称》	谈祥柏 著 (美)伽德纳 著;李建臣,刘正新 译 (美)亚瑟·本杰明,迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译 顾森 著 丘成桐,刘克峰,杨乐 著	科学出版社 科学出版社 中国传媒大学出版社 人民邮电出版社 高等教育出版社								
教学目标	<b>一、知识和技能目标:</b> 1. 要求学生能够通过学习了解典型趣味问题的灵活性特征; 2. 要求学生能够通过具体问题的深入探讨,初步了解并掌握趣味计算的灵活策略.									
	<b>二、过程和方法目标:</b> 1. 注意借助具体问题,引入数学问题的基本思想方法、技巧性解题过程,广泛开阔学生的眼界; 2. 通过具体的深入探讨,有效激发学生对数学学科的浓厚兴趣.									
教学重点	古今中外数学学科典型趣味问题的灵活解决方案									
教学难点	问题的起源背景、一般解决思路、技巧性处理方法与灵活性看待方式									

<p><b>学习内容分析</b></p>	<p>“第三章 啊哈！灵机一动”是《数学的智慧与乐趣》的基础内容，本章的主要内容将促使学生深刻理解数学趣味问题的一般解决思路和灵活性解决方案。对于首次接触本门课程的学生而言，利用直观、具体且易于理解的数学趣题，展示数学问题的技巧性解决过程至关重要和灵活应对策略。这将帮助学生有效地激发对数学的学习兴趣，良好地掌握数学问题解决的基本思想、定义内涵及其趣味、灵活的解决过程。</p>
<p><b>学生分析</b></p>	<p>授课教师通过新课内容的引入介绍，帮助学生有效扭转以往认为数学“死板、无聊”的基本印象。关于古今中外各类趣味数学问题的解决思路探讨、具体步骤实施、数学工具应用，以及灵活解决策略的详细介绍，将激发学生对数学问题探讨的积极性，并良好地把握数学问题的思想来源、定义内涵、解决途径、灵活处理方式及其有效应用。</p>
<p><b>教学设计思路</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 首先说明本章的主要内容，明确学习目标、学习重点和学习难点；</li> <li>2. 依据简单直观的具体数学趣味问题，明确该问题的起源背景、基本特征，提出解决问题的一般思想方法、具体解决方案和实际操作步骤，特别注意强调其灵活性；</li> <li>3. 参考不同类型问题的具体解决方法，探讨数学学科的重要思想方法的灵活应用策略；</li> <li>4. 依照具体问题的归纳总结，提出数学问题处理方法和思路的广泛灵活应用，并以严格的数学描述形式予以展示，通过注意事项的加强说明，使学生明确相应问题的表述形式、深刻含义、存在条件及其应用意义，从而使学生能够较为准确地把握典型的数学趣味问题。</li> </ol>
<p><b>学习方法</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 通过具体问题的详细讨论过程，了解解决各种不同类型的数学趣味问题的基本思想方法和具体操作步骤，注意引导学生对数学问题的基本概念进行深入分析和全面掌握；</li> <li>2. 对于具体问题的详细介绍，要求逐条展开，同时借助问题背景、性质特征、几何解释和理论说明加强学生对具体问题的有效掌握，并明确该问题的基本用途和使用价值。</li> </ol>

教 学 过 程		
教学环节安排	教学内容	教学方式媒体使用
<p>新课引入</p>		<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 介绍本章的主要学习内容，强调数学问题处理的灵活性特征，并提醒学生注意；</li> <li>2. 给出数学问题灵活性所需的基本条件，并积极鼓励学生不要妄自菲薄，努力提升自身数学素质；</li> </ol>

新课教学

### § 3.1 谜题洞察力

有一列火车以每小时140千米的速度离开洛杉矶直奔纽约而去。同时，另一列火车以每小时160千米的速度从纽约开往洛杉矶。如果有一架直升机以每小时300千米的速度和两列火车同时启动，从洛杉矶出发，碰到另一列火车后返回，往返在两列火车之间，直到两列火车相遇为止。一只从洛杉矶到纽约的铁路长3300千米，请问：这架直升机飞行了多远路程？

$$300 \times [3300 \div (140 + 160)] = 3300 \text{ (千米)}$$

### 苏步青爷爷做过的题目

甲和乙从东西两地同时出发，相对而行，两地相距100千米。甲每小时走6千米，乙每小时走4千米，几小时两人相遇？如果甲带了一只狗，和甲同时出发，狗以每小时10千米的速度向乙奔去，遇到乙后立即回头向甲奔去；遇到甲又回头向乙奔去，直到甲、乙两人相遇时狗才停住。请问：这只狗共奔了多少千米路？

$$100 \div (4 + 6) = 10 \text{ (小时)}$$

$$10 \times 10 = 100 \text{ (千米)}$$

1. 提出问题；
2. 说明问题背景的复杂性对于解决问题而言，反而是有百利而无一害的；
3. 请学生思考解决该问题的一般常规思路，并分析其优缺点；
4. 给出该问题的特别解决思路，由此令学生体会数学灵活性的突出特点；

1. 给出与前一问题“异曲同工”的新问题；
2. 再要求学生对该问题予以解决；

苏步青 (1902.9.23—  
2003.3.17)



中国科学院院士，中国杰出数学家，被誉为数学之王，与棋王谢侠逊、新闻王马星野并称“平阳三王”。主要从事微分几何学和计算几何学等方面的研究。他在一般空间微分几何学、仿射微分几何学、射影微分几何学、高维空间共轭理论、几何外型设计、计算机辅助几何设计等方面成就突出。

### § 3.2 比赛与握手

某市举办迎春足球邀请赛，参加的共有16所学校，每校都派出甲、乙两个球队，甲队实力较强，乙队稍差。根据比赛规则，每两队之间都要进行一场比赛，但同一所学校的甲、乙两队不进行比较。经过一段时间以后，邀请赛组委会进行了统计，他们发现：除了五爱中学甲队以外，其余各队已比赛过的场数都不相同，请问：五爱中学的乙队已经比赛过多少场了？

同一所学校的甲、乙两队不进行比较

1. 介绍我国杰出数学家苏步青先生的人物生平；

1. 介绍问题背景，并提出问题；
2. 要求学生对基本条件进行梳理和分析；
3. 明确解决该问题的关键信息；
4. 进行深入的逐步分析；

1. 除了五爱中学的甲队以外，其余有31支球队；
2. 除了五爱中学的甲队以外，其余的31支球队已经赛过的场数各不相同；
3. 除了五爱中学的甲队以外，其余的31支球队已经赛过的场数各不相同，即其每队已经比赛的场数分别应为0, 1, ..., 30场；
4. 赛的最多的球队已经赛了30场，与之同校的球队应该赛了0场；
5. 已赛28场与已赛2场的球队同校；已赛27场与已赛3场的球队同校；...已赛16场与已赛14场的球队同校；已赛15场的球队即为五爱中学乙队！

### 参加宴会的握手问题



16对夫妇参加宴会，每人都同别人握手，但相同的两人之间只握一次手，而自己夫妻之间不握手。

同构对应的关系：  
握手  $\longleftrightarrow$  比赛  
夫妻  $\longleftrightarrow$  同校球队

1. 结合学生的思考结论，给出具体、严格的逻辑推理过程；

1. 给出握手问题；

### § 3.3 混合魔法

历史文化名城——扬州

地方特色名茶——魁龙珠

魁龙珠——

龙井、珠兰、魁针按比例混合调制；

龙井取其色，

珠兰取其香，

魁针取其味



今有两种茶叶，售价分别是每千克51元与每千克89元。混合后，平均售价为每千克54元，问应如何混合？也就是说，两种茶叶各需多少？

混合图表

平均价	原价	差价	混合比
54	51	3	35
54	89	35	3

1. 介绍问题涉及的文化历史背景；

1. 提出问题；

2. 要求学生给出问题解决的一般思路；

3. 利用全新的数学结构——表格，给出解决问题的简洁方法；

4. 使学生领会表格的妙用；

### 鸡兔同笼问题

今有鸡兔同笼，上面有头50只，下面有脚160只，  
试问鸡兔各有几只？

混合图表

平均脚数	原有脚数	差数	混合比	
3.2	2	1.2	0.8	2
3.2	4	0.8	1.2	3

### 缅甸农夫的分鸡趣闻

尊敬的国王陛下，贫穷的我只能给您献上家中唯一的一只公鸡，作为贺礼！

一只鸡太微不足道，我一家六口人；我、王后、两个王子、两个公主，我们怎么分呢？



1. 提出“鸡兔同笼”问题；
2. 请学生给出各种可能的不同解决思路：方程法、差额法；
3. 介绍混合图表的方法；

1. 讲述往届修读学生收集的趣闻故事；







### § 3.4 神奇的兔子数列

#### 兔子的繁殖问题

若每对兔子(一雌一雄)每月能生一对小兔子(也是一雌一雄,下同), 每对兔子第一个月无生殖能力, 但从第二个月后便能每月生一对小兔子。假定这些兔子都不发生死亡现象, 那么从一对刚出生的兔子开始, 一年之后会有多少对兔子呢?



1. 介绍问题;
2. 请学生思考一般的解决思路和处理方法;

兔子的繁殖问题解析:

1. 第一个月: 只有一对小兔子;
2. 第二个月: 仍然只有一对小兔子;
3. 第三个月: 这对兔子生了一对小兔子, 这时共有两对兔子;
4. 第四个月: 老兔子又生了一对小兔子, 而上个月出生的小兔子还未长大, 故这时共有三对兔子;
5. 第五个月: 有两队兔子可繁殖(原来的老兔子和第三个月出生的小兔子), 共生两对小兔子, 这时共有五对兔子; .....

兔子的繁殖问题解析图表

月份	1	2	3	4	5	6	7
小兔子对数	1	0	1	1	2	3	5
大兔子对数	0	1	1	2	3	5	8
总数	1	1	2	3	5	8	13

月份	8	9	10	11	12	13	...
小兔子对数	8	13	21	34	55	89	...
大兔子对数	13	21	34	55	89	144	...
总数	21	34	55	89	144	233	...

1. 总结先前的具体分析内容;

1. 利用直观的表格进行具体分析和计算;
2. 引入斐波那契数列;

兔子的繁殖问题——兔子数列(斐波纳契Fibonacci 数列)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

斐波纳契(Leonardo Fibonacci, 1175-1240)



斐波纳契出生于比萨，是生活在丢番图之后、费尔马之前这2000年间欧洲最杰出的数论学家。由于其父亲是负责商业领域的官员，所以他有机会跟随父亲出访各国并游览了阿拉伯、埃及、西西里、希腊、叙利亚等国家，从而接触到东方的数学和阿拉伯数学，并将此传到欧洲。斐波纳契的著作是1202年所著的《算盘书》。

兔子的繁殖问题——兔子数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

斐波纳契( Fibonacci )数列

1. 通项公式: 
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

18世纪初法国数学家比内(Binet)

2. 相邻两项之比: 
$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{L}}}$$

1753年希姆松( R. Simson )

1. 介绍斐波那契的人物生平;
2. 给出《算盘书》中的有趣问题，请学生积极思考;

1. 介绍斐波那契数列的特殊性质及其神奇之处;

$$3. F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

相邻的斐氏数之平方和与平方差仍为斐氏数

$$4. F_{n+1}^2 = F_n F_{2n+1} + (-1)^n$$

连续三项斐氏数，首尾两项之积与中间项平方之差为1

$$5. \text{两相邻斐氏数互素: } (F_n, F_{n+1}) = 1$$

$$6. F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \quad \text{前}n\text{项之和}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1} \quad \text{前}n\text{项平方和}$$

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \quad \text{奇数项之和}$$

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \quad \text{偶数项之和}$$

$$F_{n+m} = F_{n-1} \times F_m = F_n \times F_{m+1}$$

$$7. F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$$

$$8. \text{斐氏数列中唯一的平方数是: } F_{12} = 144$$

$$9. \text{任意四个连续的斐氏数} a, b, c, d, \quad c^2 - b^2 = ad$$

用固定正整数除所有各项，余数呈周期性变化

11. 若 $m$ 为 $n$ 之倍数，则 $F_m$ 为 $F_n$ 之倍数

12. 每一斐氏数若为素数，则契角标亦为素数( $F_3$ 除外)

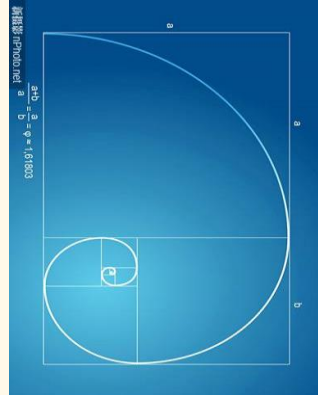
$$13. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{10^{i+1}} = \frac{1}{89} \quad \text{1953年Stancliff}$$

$$14. F_{(m,n)} = (F_m, F_n) \quad \text{法国数学家吕卡(F.E.Lucas)}$$

15. 末位数字有周期性：末位数字周期为60，末两位数字周期为300，末三位数字周期为1500，末四位数字周期15000，末五位数字周期150000

## 斐波纳契( Fibonacci )数列的应用

### 1. 鹦鹉螺与黄金比例:



### 2. 蓟的花头与Fibonacci 数列:



13条左螺旋和21条右螺旋    13条右螺旋和21条左螺旋

1. 给出斐波那契数列的具体应用;
2. 令学生感受大自然的神奇力量;

1. 激励学生在现实生活中积极发现, 努力验证;

### 3. 向日葵的花盘与Fibonacci 数列:



向日葵花盘的螺线数一般为34和55，55和89，89和144

### 4. 自然界中的各种Fibonacci 螺旋:



1. 激发学生的探索精神;

5. 计算机绘制的Fibonacci 螺旋:

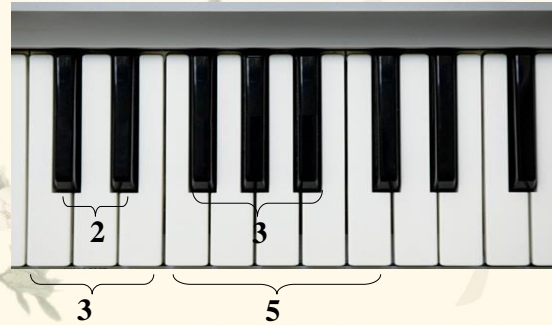


1. 激励学生对计算机的重新认识;

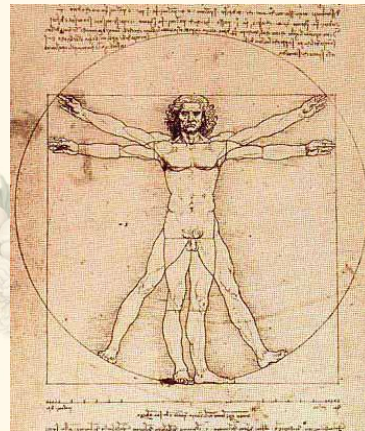


## 6. 钢琴琴键与Fibonacci 数列:

中国古代: 全弦共有十三徽  
二池, 三纽, 五弦, 八音, 十三徽。



## 7. 名画《维特鲁威人》与Fibonacci 数列:



课堂小结	<ol style="list-style-type: none"><li>1. 授课过程中，充分重视学生的思考活动，注意通过常规一般思路与灵活巧妙方法的相互对比，使学生认识到处理问题灵活性的必要，并针对性的有效提高学生在这一方面的水平和能力；</li><li>2. 将纯粹的数学问题进行有效的扩展，拓宽学生视野，活跃学生思维；</li></ol>	
课后反思		